



Structural properties of planar graphs of urban street patterns

Alessio Cardillo

Dipartimento di Fisica e Astronomia – Università degli Studi di Catania

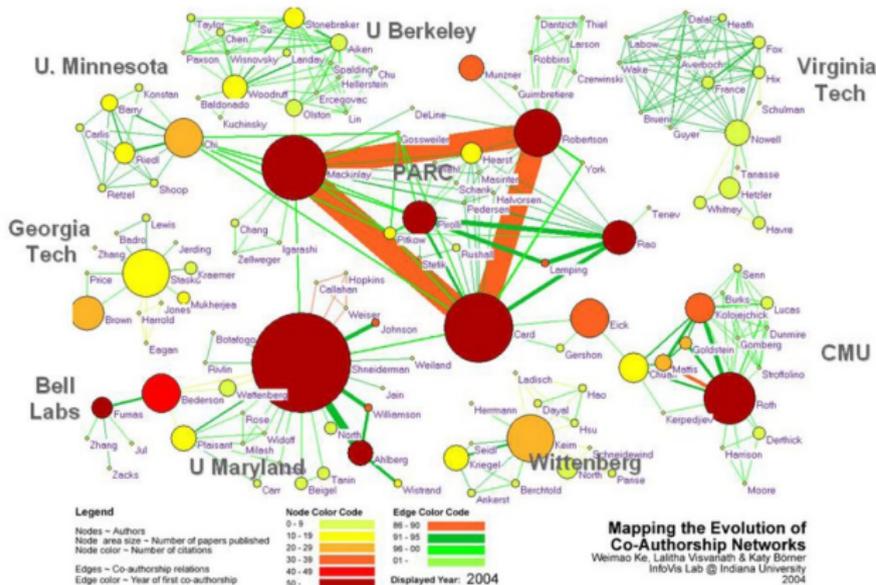
Esame per il conseguimento della Laurea Specialistica in Fisica



Un Mondo di Reti Complesse

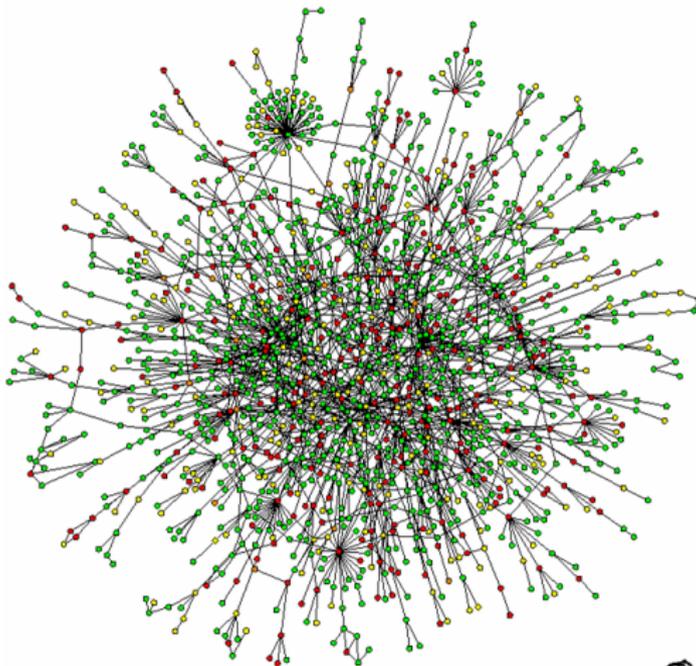
Mapping the Evolution of Co-Authorship Networks

Ke, Viswanath & Borner, (2004) Won 1st prize at the IEEE InfoVis Contest.



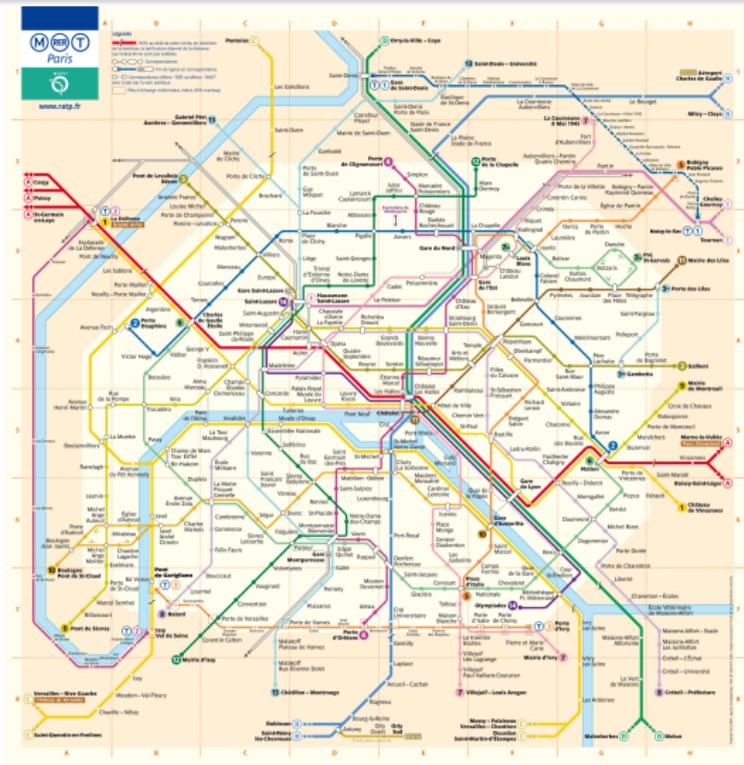


Un Mondo di Reti Complesse





Un Mondo di Reti Complesse





Città & Reti Complesse



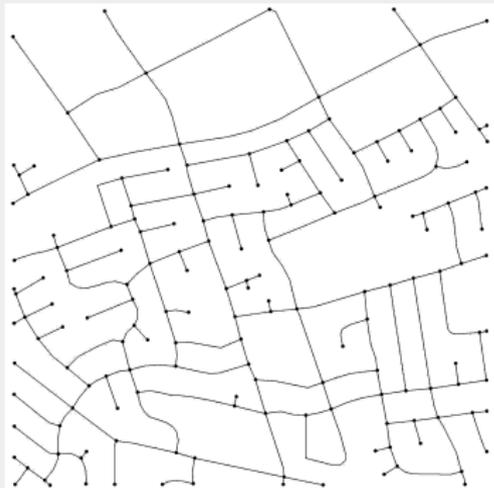
Mappare una città in un grafo





Città & Reti Complesse

Mappare una città in un grafo



- Intersezioni = nodi;
- Strade = lati.



Dagli alberi alle GT



Domanda:

Come si confrontano i grafi di città differenti?

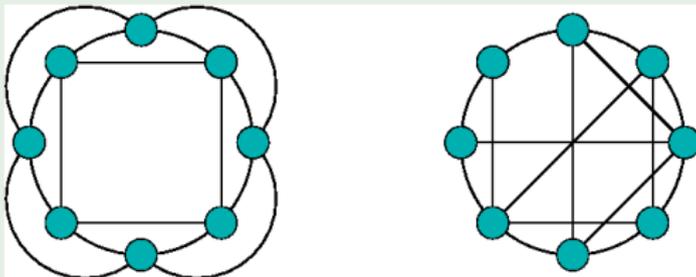


Dagli alberi alle GT



Risposta:

Di solito, le reti vengono confrontate rispetto alla loro versione **randomizzata**.



Randomizzazione \rightarrow **Perdita della Planarità;**

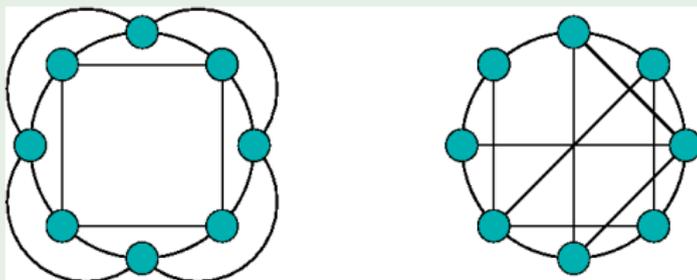


Dagli alberi alle GT



Risposta:

Di solito, le reti vengono confrontate rispetto alla loro versione **randomizzata**.



Randomizzazione \rightarrow **Perdita della Planarità**;

Si fa ricorso a due grafi planari limite:

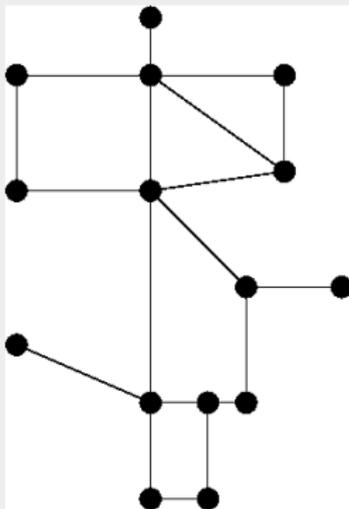
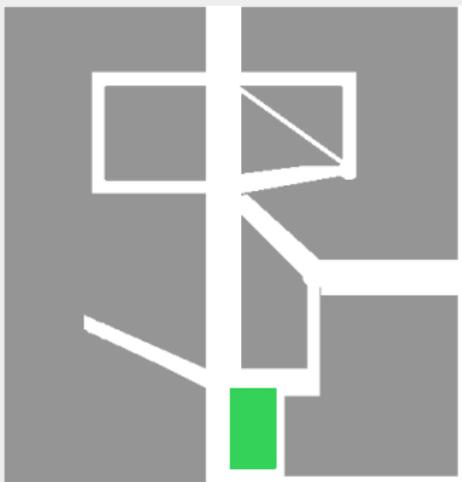
- Minimum Spanning Tree (MST);
- Minimum Weighted Triangulation (MWT).



Dagli alberi alle GT

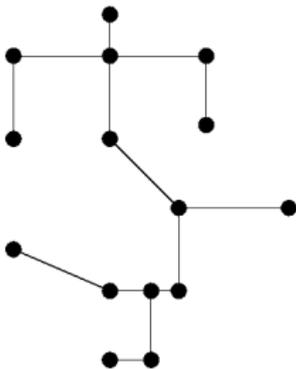
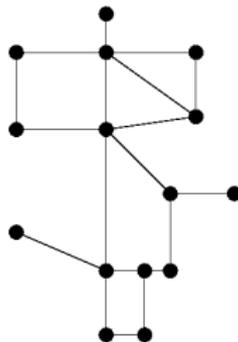


Un esempio:





Dagli alberi alle GT

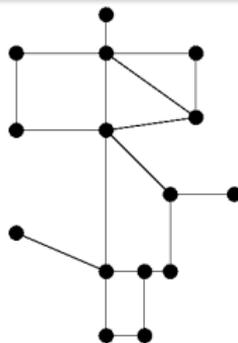


Definizione

Il **minimum spanning tree** (MST) è l'albero più "corto" che connette tutti i nodi in un'unica componente connessa.

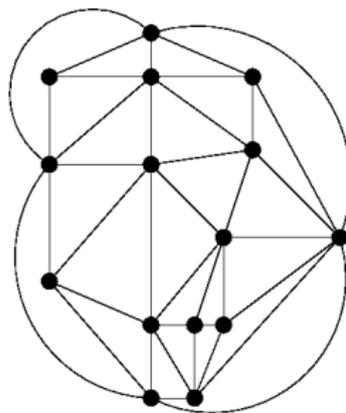


Dagli alberi alle GT



Definizione

La **Minimum Weighted Triangulation** (MWT) è la triangolazione con il maggior numero possibile di lati K_{\max} , che minimizzi la lunghezza totale.





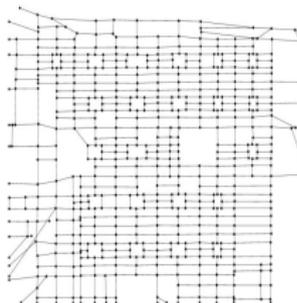
Dagli alberi alle GT



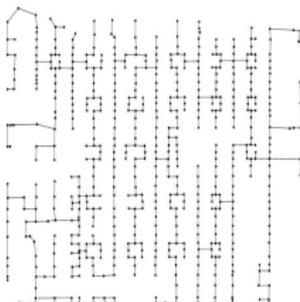
Città



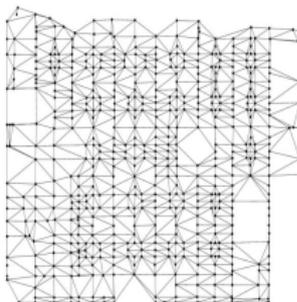
Grafo



MST



GT



A. Cardillo, S. Scellato, V. Latora, S. Porta, *Physical Review E* **73** (2006) 066107.

S. Scellato, A. Cardillo, V. Latora, S. Porta, *European Physical Journal B* **50** (2006) 221.



Proprietà Topologiche



Dati

Abbiamo considerato 20 porzioni di città differenti suddivise in due categorie:

- 1 Città non soggette a processi di pianificazione urbana (auto-organizzate).**
Ahmedabad, Cairo, Bologna, Londra, Venezia e Vienna;
- 2 Città pianificate somiglianti a reticoli (grid – iron).**
Barcellona, Los Angeles, New York, Richmond, Savannah e San Francisco.



Proprietà Topologiche



- Proprietà Locali
 - Coefficiente di Meshedness M ;
 - Motivi;
- Proprietà Globali
 - Efficienza Globale $E(G)$;
 - Costo W ;



Proprietà Topologiche



- Proprietà Locali
 - Coefficiente di Meshedness M ;
 - **Motivi**;
- Proprietà Globali
 - Efficienza Globale $E(G)$
 - Costo W



Proprietà Topologiche



- Proprietà Locali
 - Coefficiente di Meshedness M ;
 - Motivi;
- Proprietà Globali
 - Efficienza Globale $E(G)$.
 - Costo W ;



Proprietà Topologiche



- Proprietà Locali
 - Coefficiente di Meshedness M ;
 - Motivi;
- Proprietà Globali
 - **Efficienza Globale $E(G)$.**
 - Costo W ;



Proprietà Topologiche



- Proprietà Locali
 - Coefficiente di Meshedness M ;
 - Motivi;
- Proprietà Globali
 - Efficienza Globale $E(G)$.
 - **Costo W** ;



Proprietà Locali



Coefficiente di Meshedness

Il **Coefficiente di Meshedness** M è una misura che tiene conto dei cicli nel grafo.

$$M = \frac{f}{f_{max}},$$

dove

$$f = K - N + 1, \rightarrow \text{numero di facce}$$

$$f_{max} = 2N - 5.$$

in particolare,

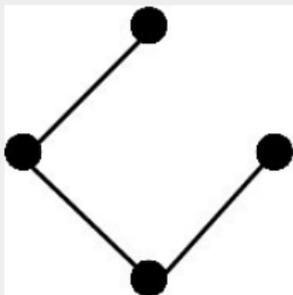
$$M = \begin{cases} 0 & \text{se } G \text{ è un albero,} \\ 1 & \text{se } G \text{ è una triangolazione.} \end{cases}$$



Proprietà Locali

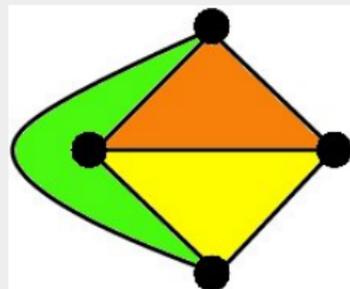


Un esempio di Meshedness:



$$f = K - N + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$$

$$M = \frac{0}{2 \cdot 4 - 5} = \frac{0}{3} = 0$$



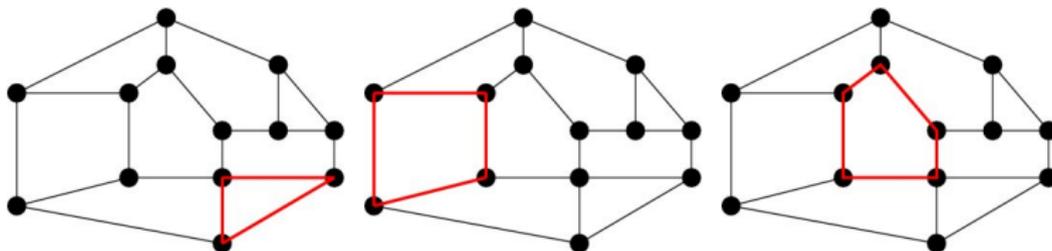
$$f = K - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

$$M = \frac{3}{2 \cdot 4 - 5} = \frac{3}{3} = 1$$



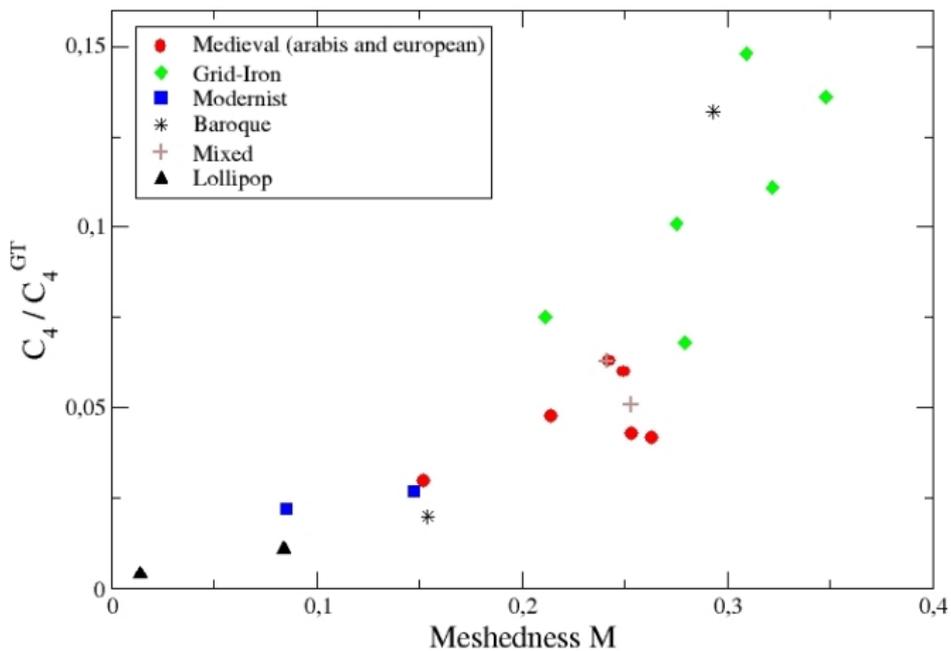
Motifs

Per valutare la complessità della struttura interna del grafo si sono contati i cicli di lunghezza tre (**triangoli**), quattro (**quadrilateri**) e cinque (**pentagoni**). Un motif è ritenuto significativo qualora si presenti un numero di volte superiore a quello che si avrebbe nel corrispondente grafo random.



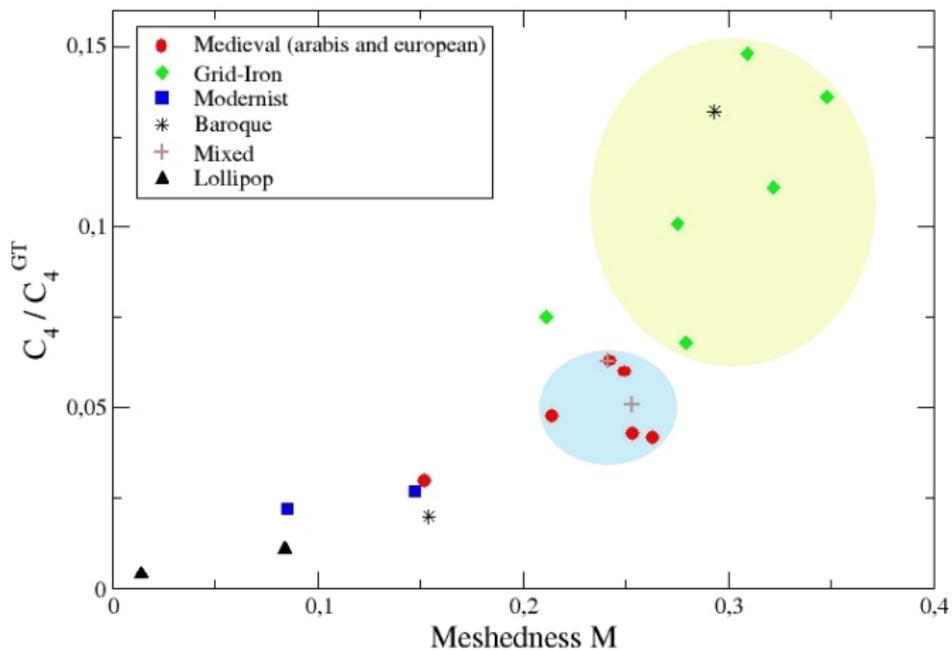


Proprietà Locali





Proprietà Locali





Efficienza Globale

Una misura della distanza media tra due nodi in un grafo è data dalla cosiddetta **efficienza**, definita come:

$$E(G) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in G, i \neq j} \frac{1}{d_{ij}} ;$$



Costo

La quantità di risorse necessarie per “costruire” una strada può assumere svariate forme funzionali. La più semplice è la distanza Euclidea tra il nodo di partenza e quello di arrivo che prende il nome di **Costo**.

$$w_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2};$$

$$W = \sum_{i,j} a_{ij} w_{ij}.$$



Analisi dei Dati



Per confrontare città differenti su scala globale si è studiata la relazione tra: l'**Efficienza Relativa** E_{rel} ed il **Costo Relativo** W_{rel} definiti come:

$$E_{\text{rel}} = \frac{E - E^{\text{MST}}}{E^{\text{GT}} - E^{\text{MST}}};$$

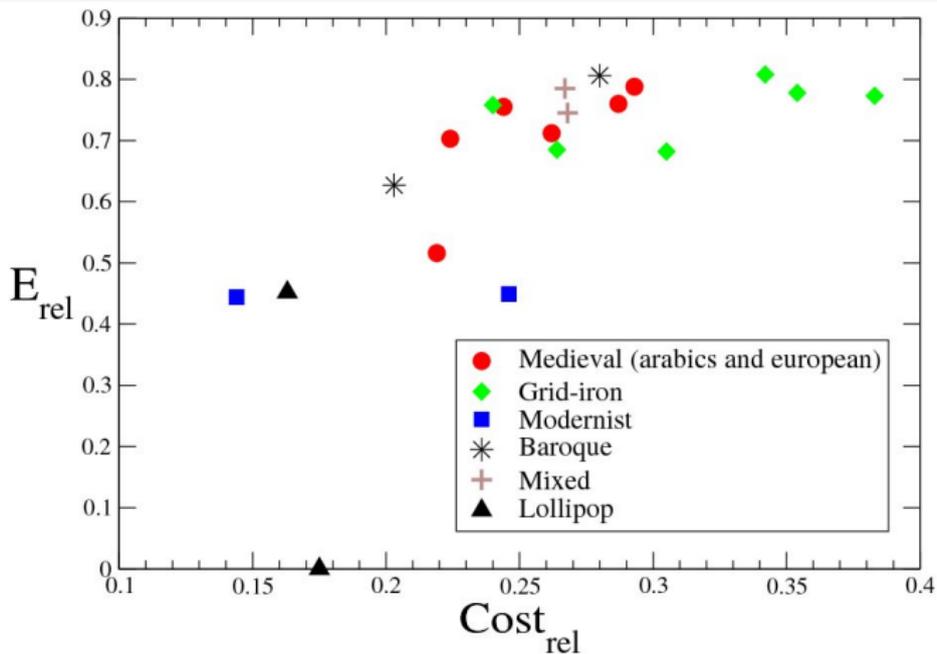
$$W_{\text{rel}} = \frac{W - W^{\text{MST}}}{W^{\text{GT}} - W^{\text{MST}}};$$

$$\text{GT} \longrightarrow E_{\text{rel}} = W_{\text{rel}} = 1$$

$$\text{MST} \longrightarrow E_{\text{rel}} = W_{\text{rel}} = 0$$



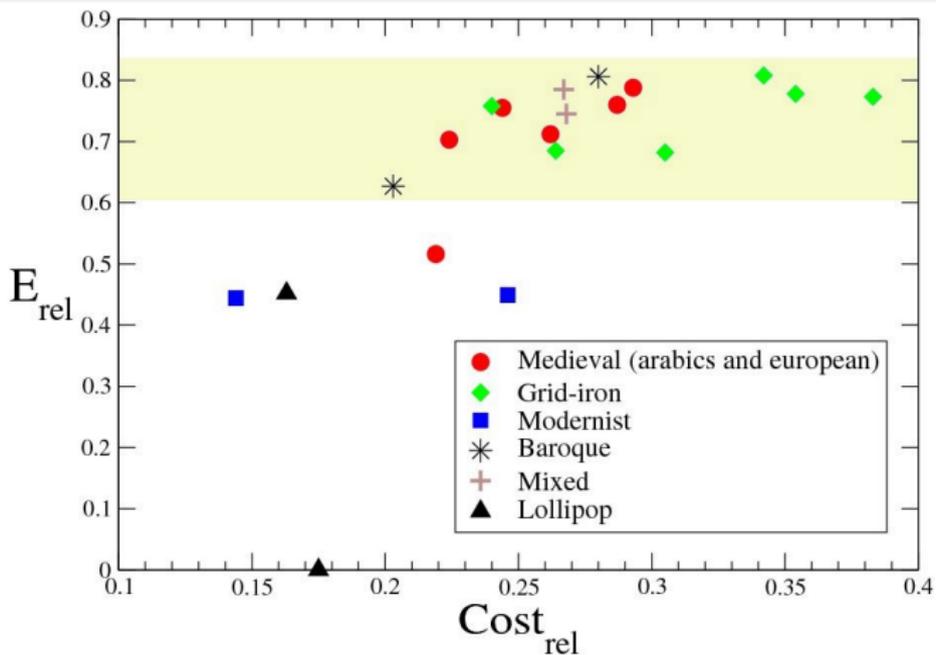
Analisi dei Dati



A. Cardillo, S. Scellato, V. Latora, S. Porta, Physical Review E **73** (2006) 066107.



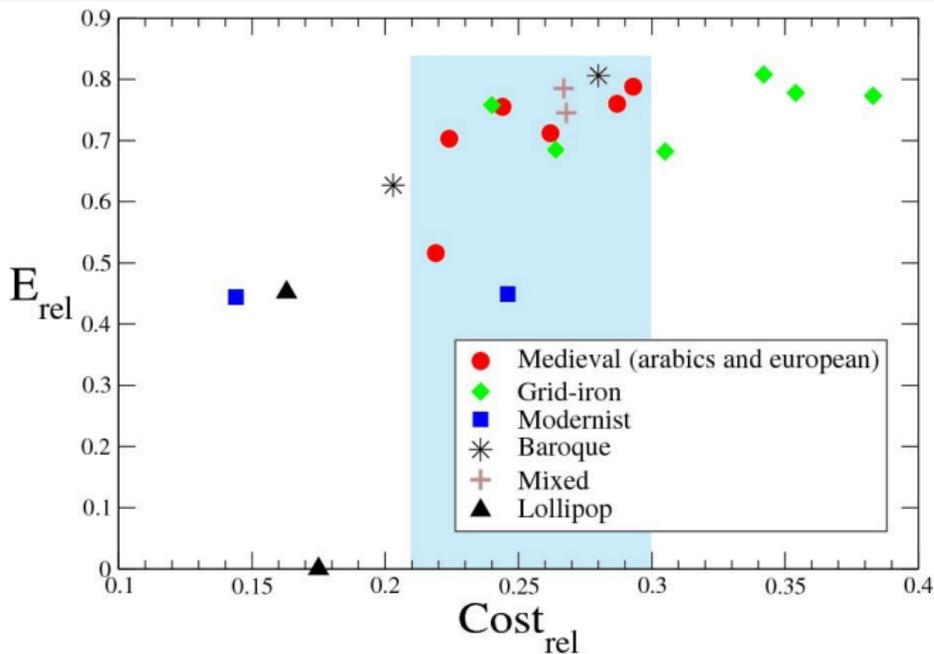
Analisi dei Dati



A. Cardillo, S. Scellato, V. Latora, S. Porta, Physical Review E **73** (2006) 066107.



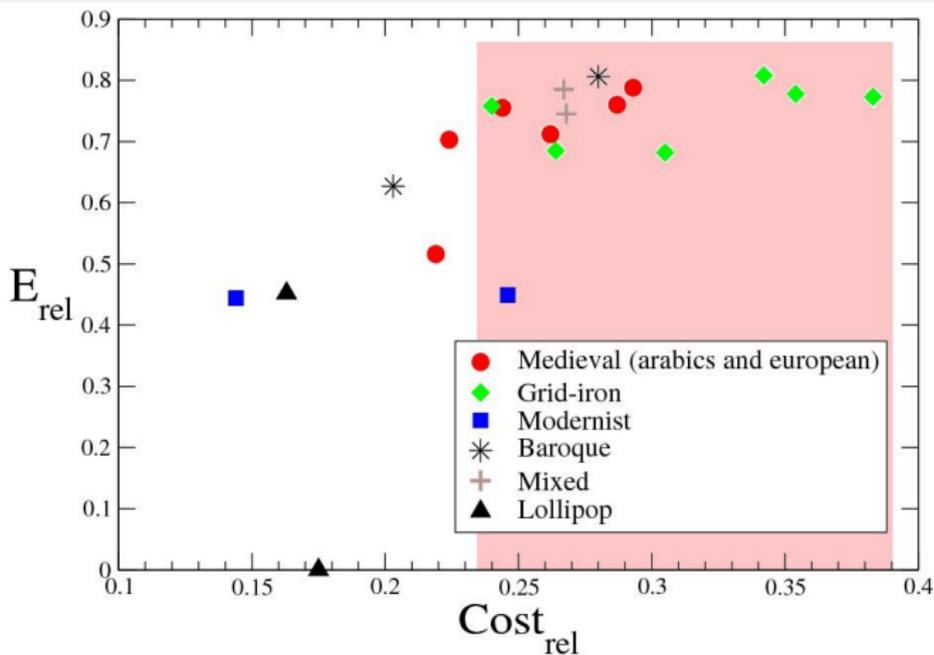
Analisi dei Dati



A. Cardillo, S. Scellato, V. Latora, S. Porta, Physical Review E **73** (2006) 066107.



Analisi dei Dati



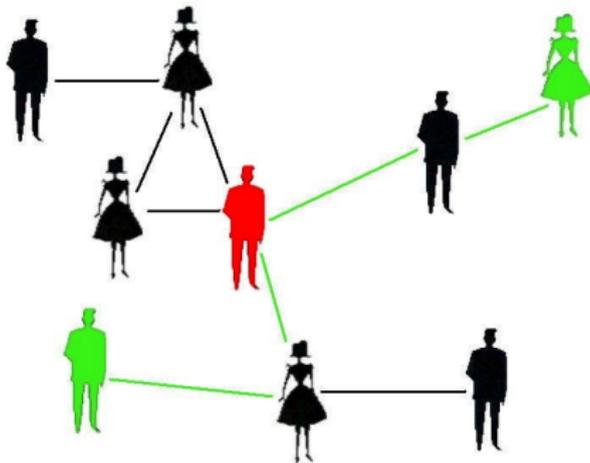
A. Cardillo, S. Scellato, V. Latora, S. Porta, Physical Review E **73** (2006) 066107.



Misure di Centralità

Centralità di Betweenness (Freeman 1977)

Quantifica l'azione come "ponte" tra due nodi.



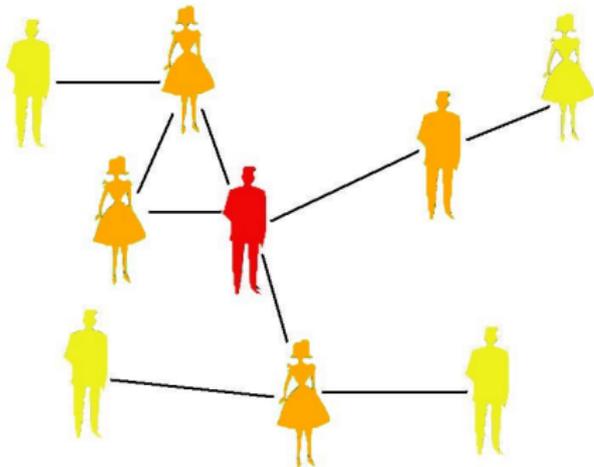
$$C_i^B = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \sum_{\substack{j,k \in G \\ j \neq k \neq i}} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}$$



Misure di Centralità

Centralità di Closeness (Sabidussi 1966)

Quantifica la “vicinanza” rispetto agli altri.



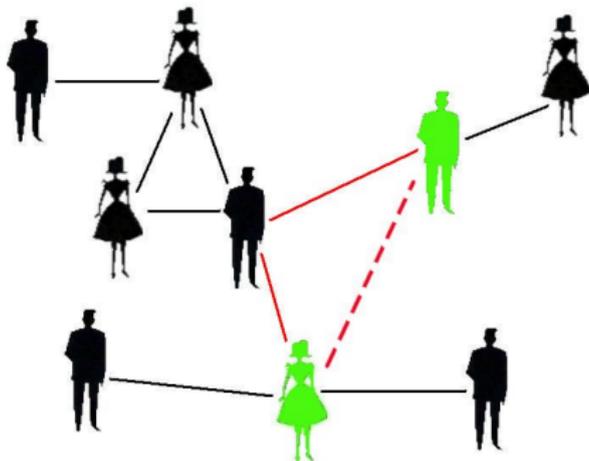
$$C_i^C = \frac{N - 1}{\sum_{j \in G} \frac{1}{d_{ij}}};$$



Misure di Centralità

Centralità di Straightness (Crucitti 2006)

Permette di valutare quanto un nodo è connesso in **linea retta** con gli altri.



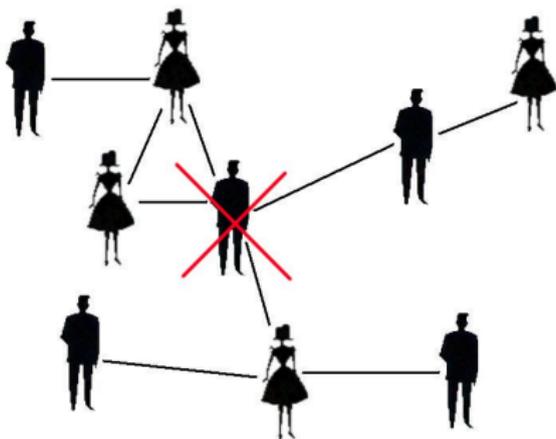
$$C_i^S = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j \in G \\ j \neq i}} \frac{d_{ij}^{Eucl.}}{d_{ij}} ;$$



Misure di Centralità

Centralità di Information (Latora 2007)

Quantifica l'effetto che la **rimozione** di un nodo ha sull'efficienza del sistema.

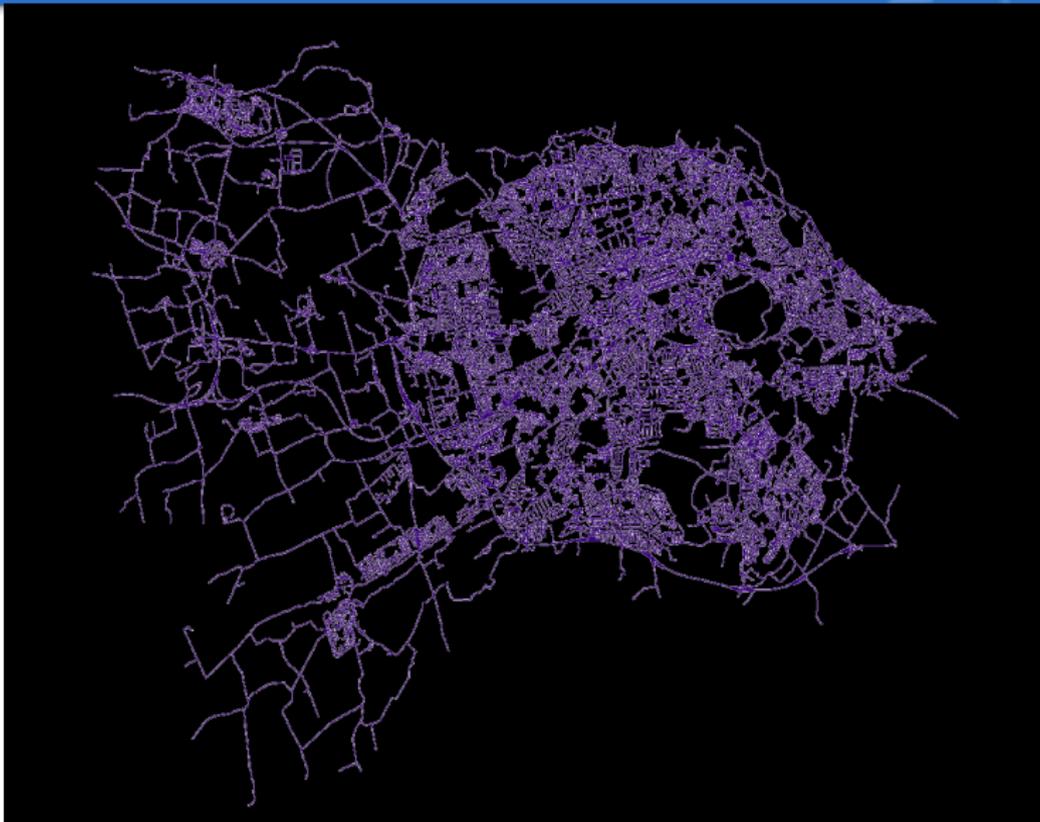


$$C_i' = \frac{\Delta E}{E} = \frac{E(G) - E(G')}{E(G)},$$

$$E(G) = \frac{\sum_{i,j \in G} \frac{1}{d_{ij}}}{N(N-1)};$$

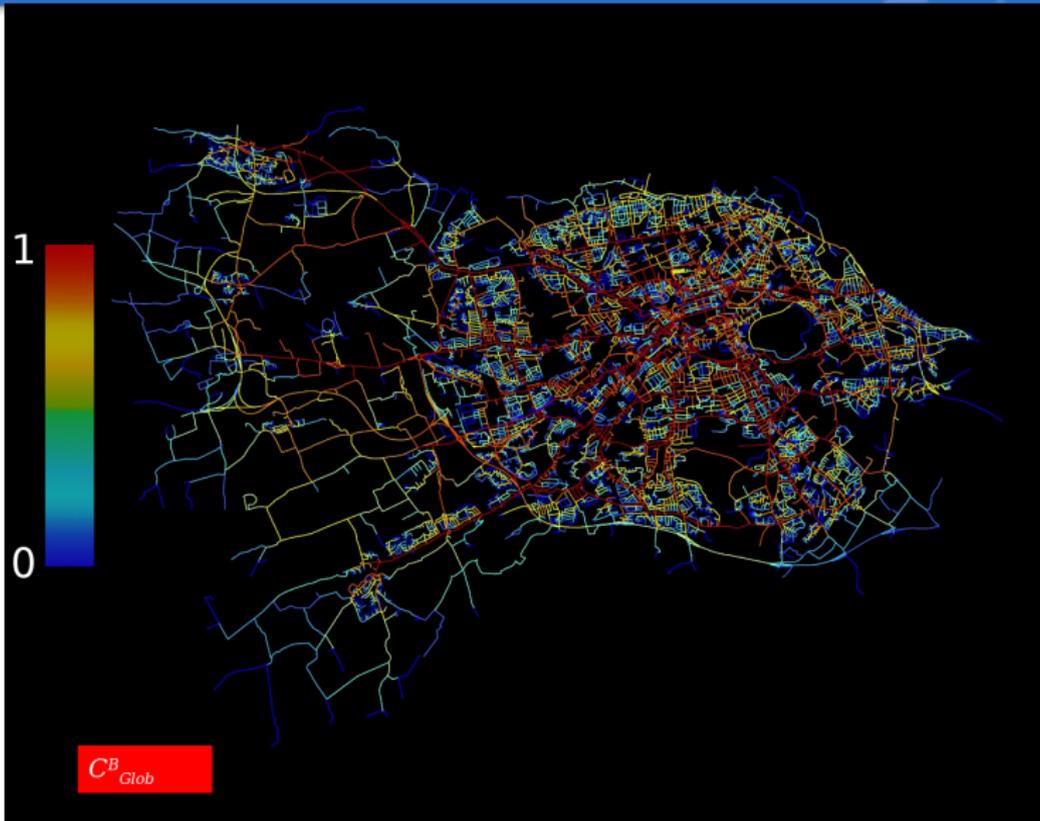


Multiple Centrality Assessment (MCA)



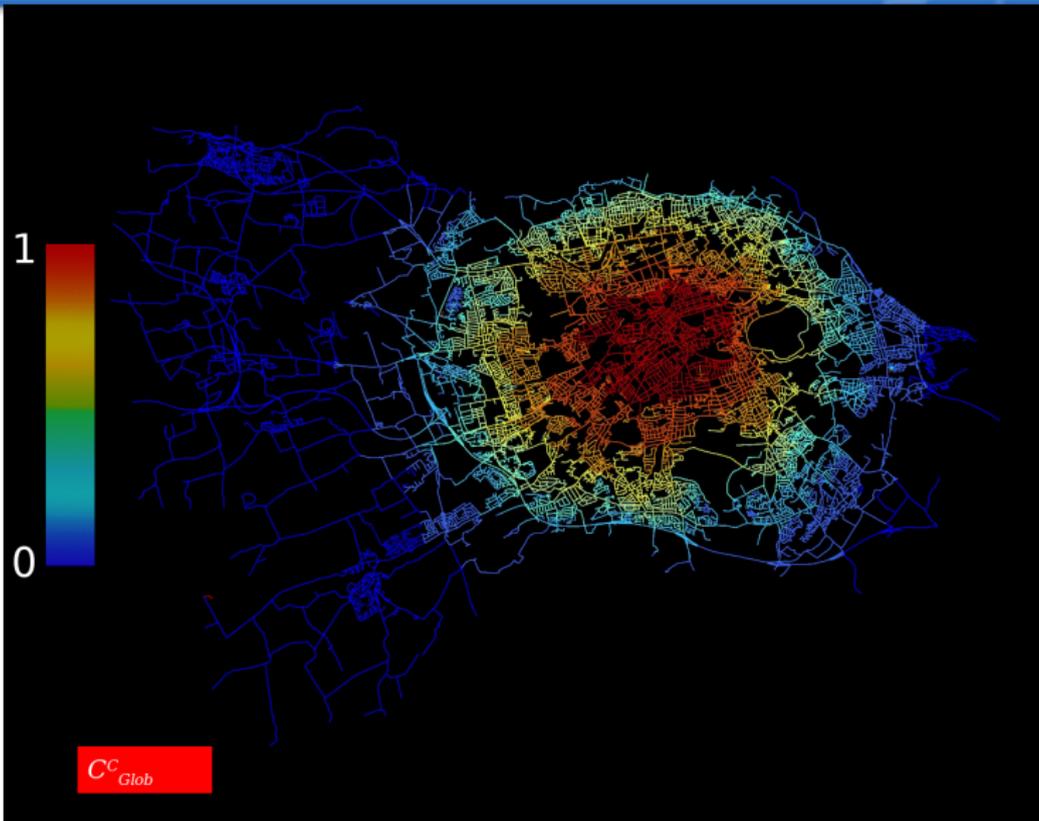


Multiple Centrality Assessment (MCA)



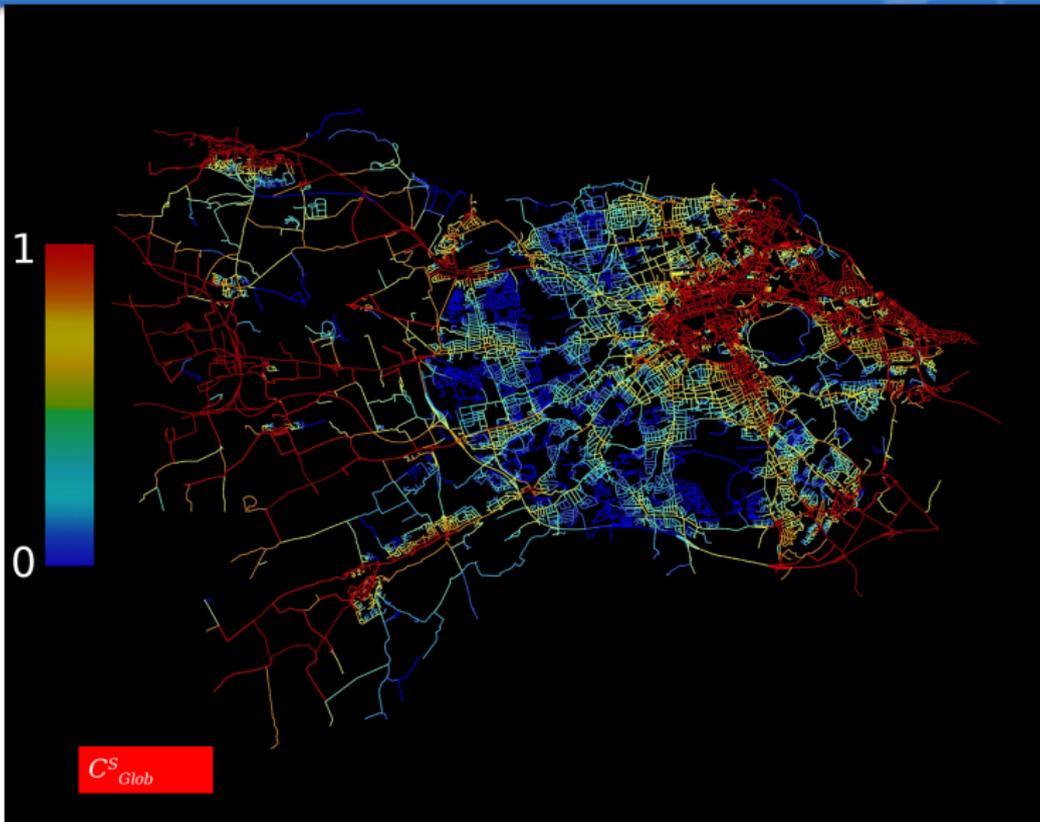


Multiple Centrality Assessment (MCA)





Multiple Centrality Assessment (MCA)





Relazione tra Centralità ed Attività Commerciali



Il Mantra del fruttivendolo





Relazione tra Centralità ed Attività Commerciali



Il Mantra del fruttivendolo



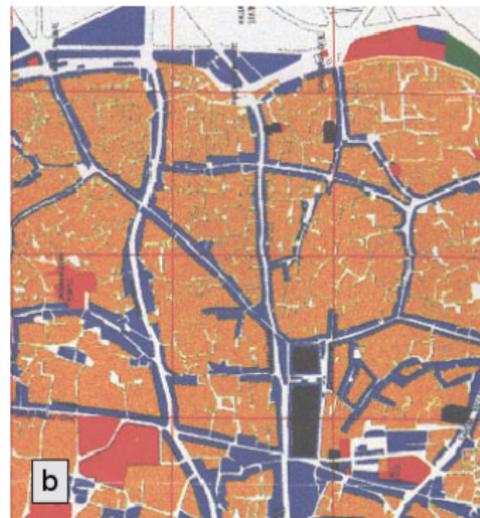
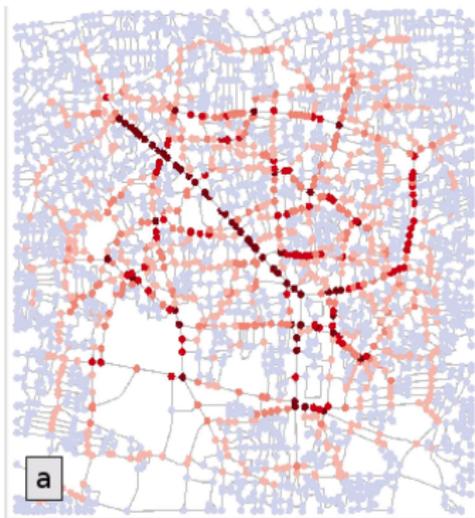
- L'attività di Mario è abbastanza fiorente, il suo credo è: *“Devi essere centrale, la gente si trova solo nei posti centrali”*.



Relazione tra Centralità ed Attività Commerciali



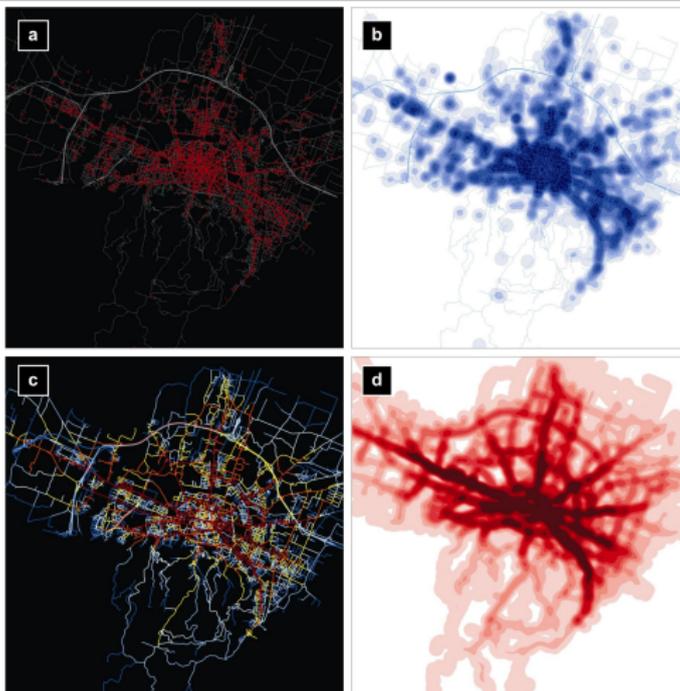
Esiste una prova empirica dell'esistenza di una correlazione tra centralità e la densità di attività commerciali?





Alcuni Risultati

Un caso particolare: la città di Bologna



Porta S et. al. – Street centrality vs. commerce and service locations in cities: a Kernel Density Correlation case study in Bologna, Italy –
Environmental and Planning B **36** (2009), 450-465.



Sviluppi Futuri

Evoluzione Temporale



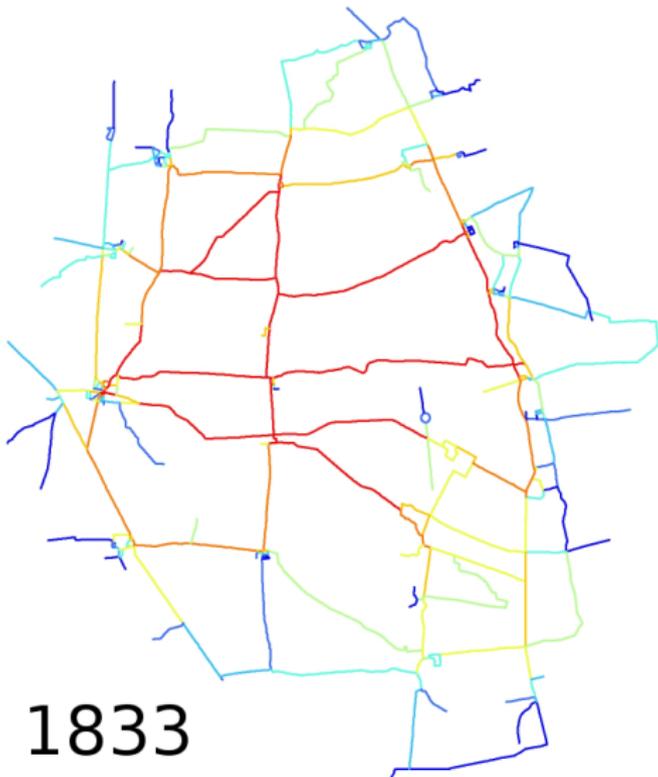
Osservazione:

Una città non è un oggetto “statico” → **Evoluzione Temporale**



Sviluppi Futuri

Evoluzione Temporale

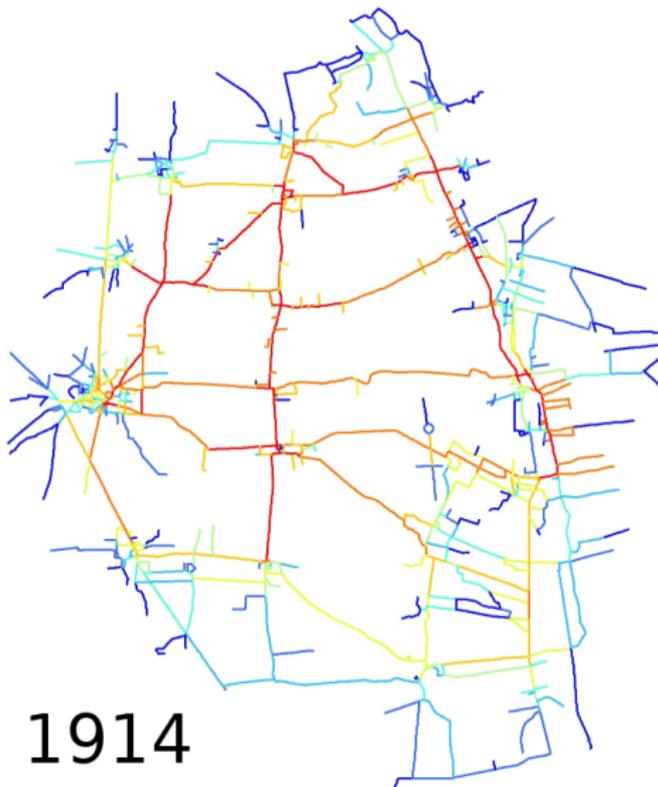


1833



Sviluppi Futuri

Evoluzione Temporale

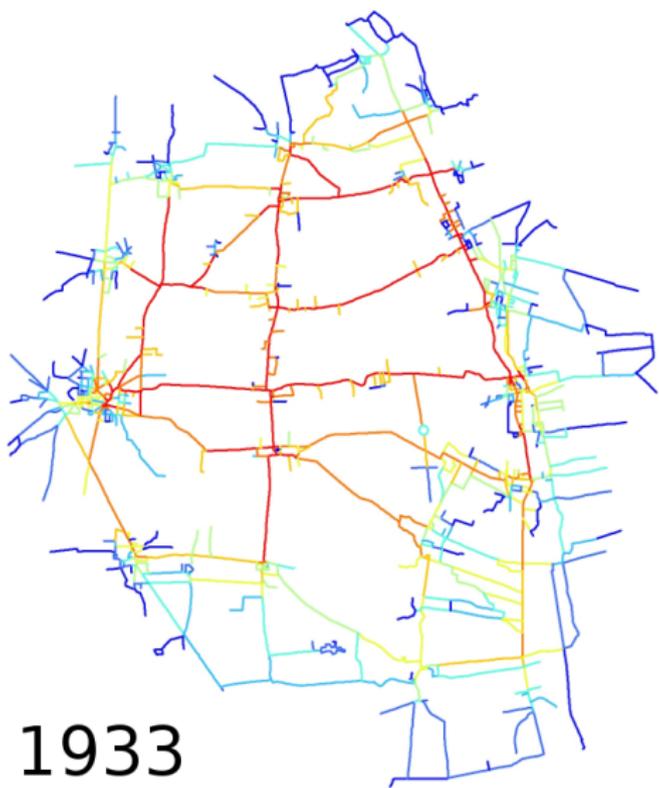


1914



Sviluppi Futuri

Evoluzione Temporale

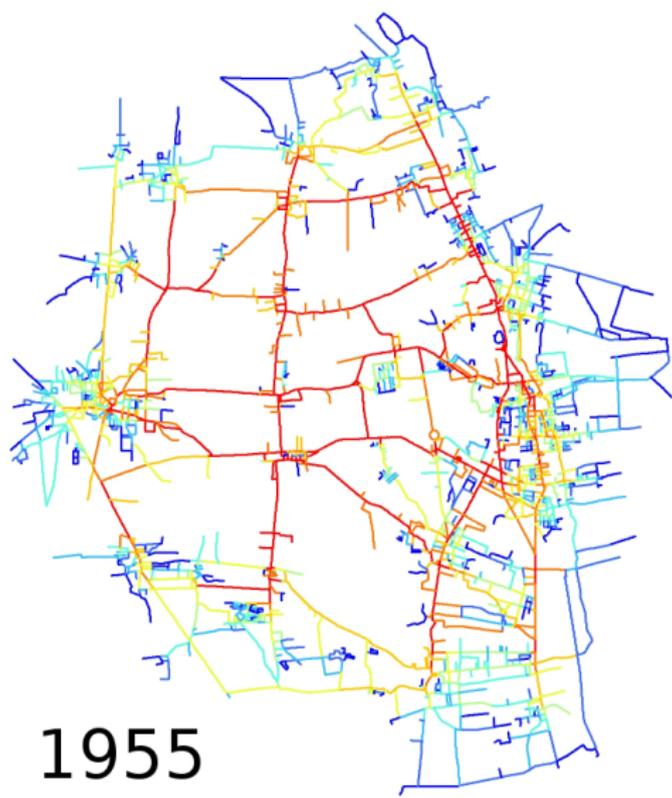


1933



Sviluppi Futuri

Evoluzione Temporale

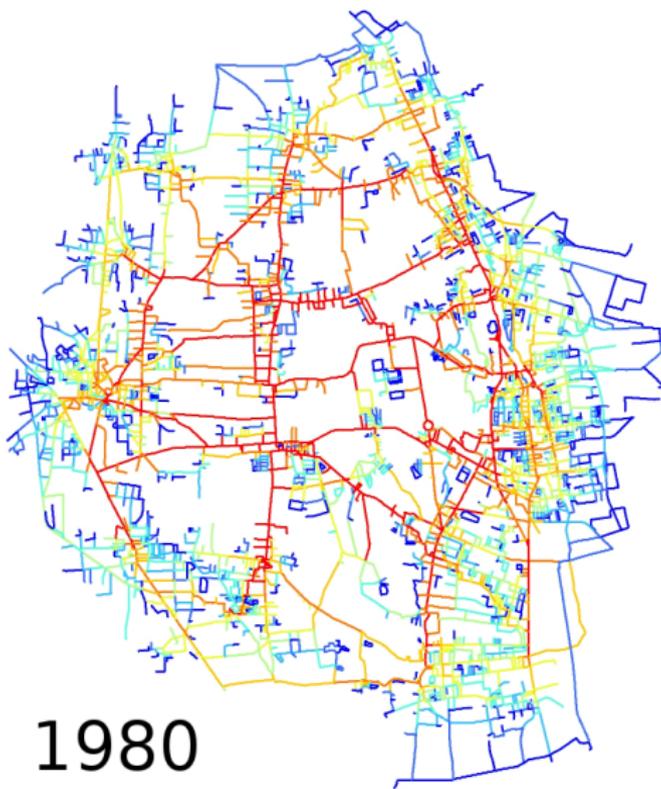


1955



Sviluppi Futuri

Evoluzione Temporale





Riassumendo



- **Elaborazione di una metodologia per classificare/confrontare grafi spaziali;**
- Analisi delle proprietà strutturali dei grafi generati a partire dalle mappe delle città;
- Studio della centralità in network urbani (MCA);
- Analisi della relazione tra centralità e la densità di attività commerciale → Geomarketing;
- Estensione al caso di reti che evolvono nel tempo.



Riassumendo



- Elaborazione di una metodologia per classificare/confrontare grafi spaziali;
- **Analisi delle proprietà strutturali dei grafi generati a partire dalle mappe delle città;**
- Studio della centralità in network urbani (MCA);
- Analisi della relazione tra centralità e la densità di attività commerciale → Geomarketing;
- Estensione al caso di reti che evolvono nel tempo.



Riassumendo



- Elaborazione di una metodologia per classificare/confrontare grafi spaziali;
- Analisi delle proprietà strutturali dei grafi generati a partire dalle mappe delle città;
- **Studio della centralità in network urbani (MCA);**
- Analisi della relazione tra centralità e la densità di attività commerciale → Geomarketing;
- Estensione al caso di reti che evolvono nel tempo.



Riassumendo



- Elaborazione di una metodologia per classificare/confrontare grafi spaziali;
- Analisi delle proprietà strutturali dei grafi generati a partire dalle mappe delle città;
- Studio della centralità in network urbani (MCA);
- **Analisi della relazione tra centralità e la densità di attività commerciale → Geomarketing;**
- Estensione al caso di reti che evolvono nel tempo.



Riassumendo



- Elaborazione di una metodologia per classificare/confrontare grafi spaziali;
- Analisi delle proprietà strutturali dei grafi generati a partire dalle mappe delle città;
- Studio della centralità in network urbani (MCA);
- Analisi della relazione tra centralità e la densità di attività commerciale → Geomarketing;
- **Estensione al caso di reti che evolvono nel tempo.**



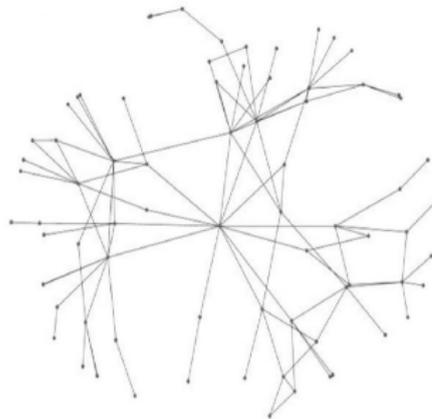
Materiale supplementare



Approccio Duale



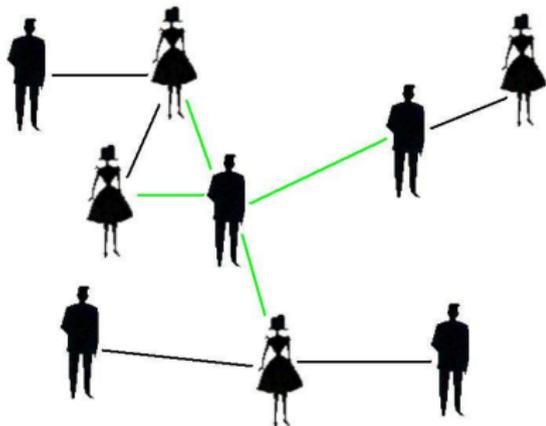
Approccio Duale



- Strade = nodi, incroci = lati;
- Peso maggiore alle strade;
- **Mappatura non unica (nomi delle strade, presenza di curve).**

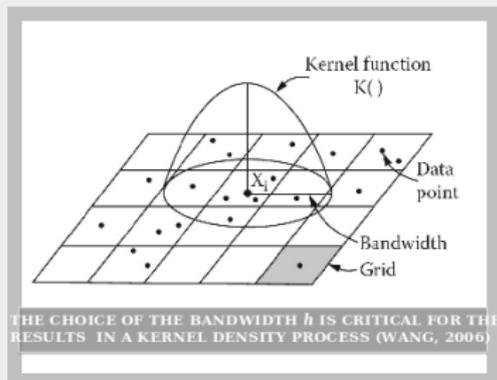


Significa conoscere “molte” persone?
Centralità di **Grado**; (Nieminem 1974)



$$C_i^D = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N a_{ij};$$

- Per poter studiare la relazione tra centralità e attività commerciale lo spazio urbano è stato suddiviso in celle quadrate. Una volta fatto questo, all'interno di ciascuna cella viene calcolato il valore di una funzione denominata **Kernel Density Estimator (KDE)** sia nel caso della centralità che in quello dell'attività commerciale.





Lo Scheletro di una Città



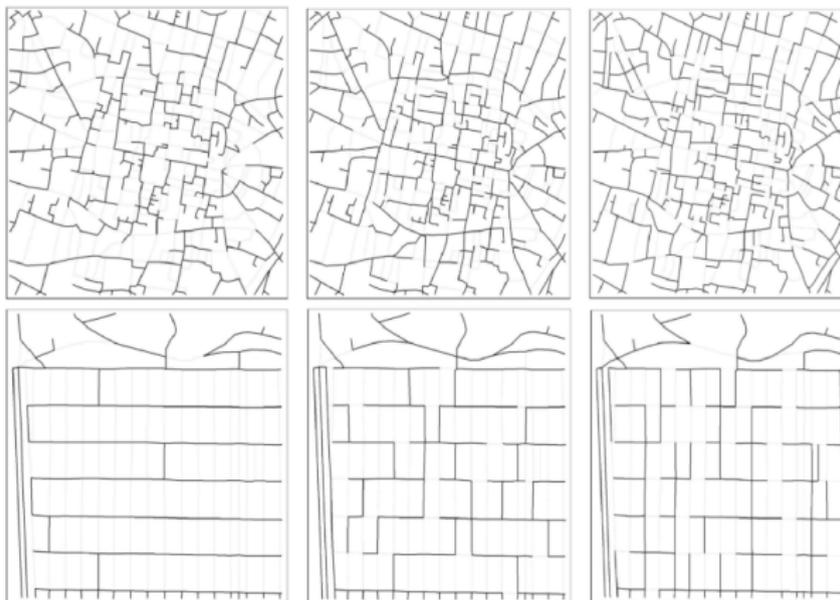
Domanda:

È possibile estrarre la **struttura portante** di una città?



Risposta

Si, costruendo i Maximum Centrality Spanning Tree (MCST).





-  A. Cardillo, S. Scellato, V. Latora, S. Porta, Phys. Rev. E **73** (2006) 066107
-  S. Scellato, A. Cardillo, V. Latora, S. Porta, Eur. Phys. Journ. B **50** (2006) 221
-  P. Crucitti, V. Latora and S. Porta Phys. Rev. E **73** (2006) 036125
-  S. Porta, P. Crucitti, V. Latora, Environmental and Planning B **33** (2006) 705
-  P. Crucitti, V. Latora, S. Porta, Chaos **16** (2006) 015113
-  Porta S et. al. – Street Centrality and Densities of Retails and Services in Bologna, Italy – Env. Plann. B 36 (2009), 450-465. – **physics/0701111**